Tentamen Wiskunde 3
Vrijdag 23/11/01
13.00 - 16.00 uur

1. Laat $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ de kromme zijn gedefinieerd door
$$\gamma(t) = (t^2, t, t^2).$$
Bereken de integraal $\int_\gamma (3x^3 - y)dx + xdy + z^3dz$.

2. Een oppervlak in $\mathbb{R}^3$ wordt gegeven met behulp van de parametervoorstelling
$$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta), \quad 0 < r < 1, \quad 0 < \theta < 4\pi.$$
Bepaal van dit oppervlak, de normaal met lengte 1 in een willekeurig punt, en de oppervlakte.

3. Laat K de kegel zijn die ontstaat door de lijn $z = x$ in het vlak $y = 0$ te wentelen om de z-as. Laat W het gedeelte van de halve bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, zijn dat binnen de kegel K ligt. Bepaal met behulp van bolcoördinaten de integraal
$$\iiint_W (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}\, dxdydz.$$

4. Laat S het halve boloppervlak zijn gegeven door $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, en laat het vectorveld $\mathbf{F}$ het vectorveld zijn gegeven door
$$\mathbf{F} = -y(x^2 + y^2)\mathbf{i} + x(x^2 + y^2)\mathbf{j}.$$
Bereken met behulp van de stelling van Stokes
$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

5. Verifieer de stelling van Gauss voor het vectorveld $\mathbf{F}$ gegeven door
$$\mathbf{F}(x,y,z) = (1, 1, z(x^2 + y^2)),$$
en de kubus met zijvlakken $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ en $z = 1$.

6. Bepaal op de doorsnijding van $z^2 = x^2 + y^2$ en $z = x + y + 2$ die punten die het verst en het dichtst bij de oorsprong liggen. Gebruik hiervoor de methode van de Lagrange multiplicatoren.